מודלים של רגרסיה לינארית

מועד א' סמסטר א' תשפ"א

חלק שני

שאלה 2 (28 נק', א-8,ב-5,ג-9,ד-6)

נתבונן במודל הרגרסיה הפשוטה שלמדנו בכיתה: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, כאשר $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

א. הוכח כי $Cov(\hat{\beta}_1, \bar{Y}) = 0$.

ב. חשב את $Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$.

ג. נתון $\bar{X} = 50.68, \bar{Y} = 275.03, SXX = 67035, SST = 1678770, SXY = 335402$, n=82
חשב רווח חיזוי לתצפית חדשה עבורה ערך X הוא $x_0 = 40$

ד. לו היינו משנים בסעיף הקודם את הנתון וערך X היה $x_0 = 45$, האם אורך הרווח היה גדול יותר או קטן יותר? נמק ללא חישובים

הערות עקרוניות: בסעיפים א-ב, ניתן להשתמש כמובן נוסחאות הרשומות בדף הנוסחאות. כמו כן, ניתן להשתמש בזהויות לגבי תוחלת שונות ושונות משותפת, כל עוד ציטטת אותם נכון.

בסעיף ד' אין לחשב מחדש רווח חיזוי ואז להשוות מספרים, אלא לתת נימוק עקרוני.

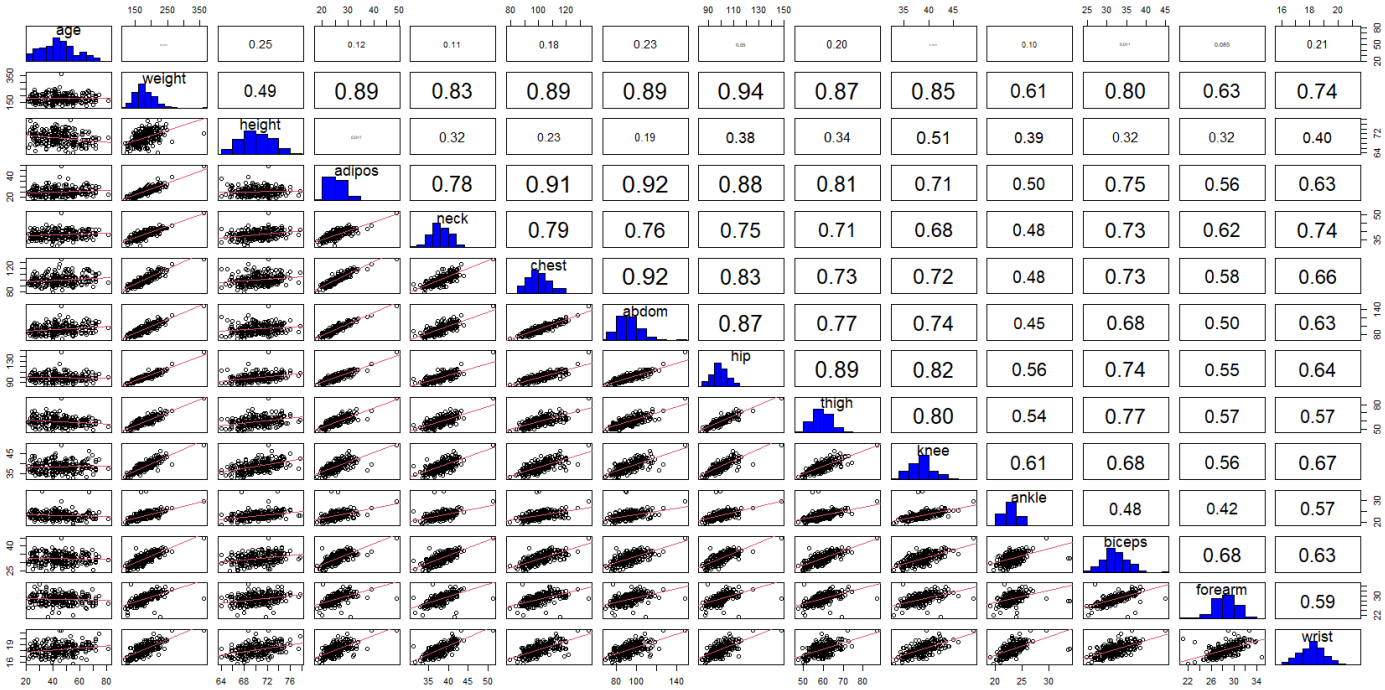
במקרה שהערך הדרוש מהטבלה לא מופיע בטבלה המצורפת, יש לבחור את הערך הקרוב ולציין זאת

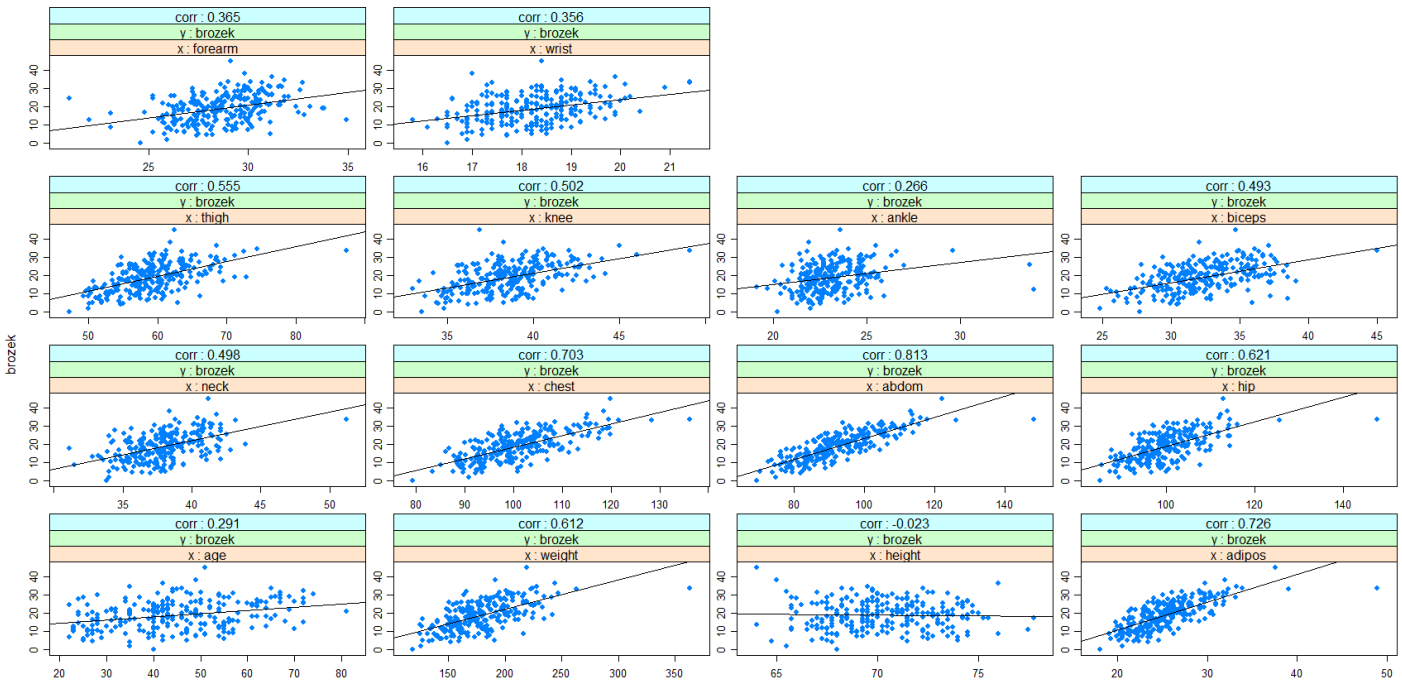
שאלה 3 (28 נק': א-11,ב-9,ג-3,ד-3,ה-2)

גיל, משקל, גובה ו -10 מדידות היקף גוף נרשמו עבור 251 גברים. בנוסף אחוז השומן בגוף של כל אדם נאמד במדויק על ידי טכניקת שקילה מתחת למים. קובץ הנתונים מכיל את המשתנים הבאים:

Brozek - Percent body fat using Brozek's equation, 457/Density - 414.2 (תלוי)
density - Density (gm/cm^3)
age - Age (yrs)
weight - Weight (lbs)
height - Height (inches)
adipos - Adiposity index = Weight/Height^2 (kg/m^2)
neck - Neck circumference (cm)
chest - Chest circumference (cm)
abdom - Abdomen circumference (cm) at the umbilicus and level with the iliac crest
hip - Hip circumference (cm)
thigh - Thigh circumference (cm)
knee - Knee circumference (cm)
ankle - Ankle circumference (cm)
biceps - Extended biceps circumference (cm)
forearm - Forearm circumference (cm)
wrist - Wrist circumference (cm) distal to the styloid processes

א. מה ניתן ללמוד מהתרשימים הבאים, על המודל והנחותיו? מה ניתן ללמוד על המולטי קולינאריות בין המנבאים השונים?





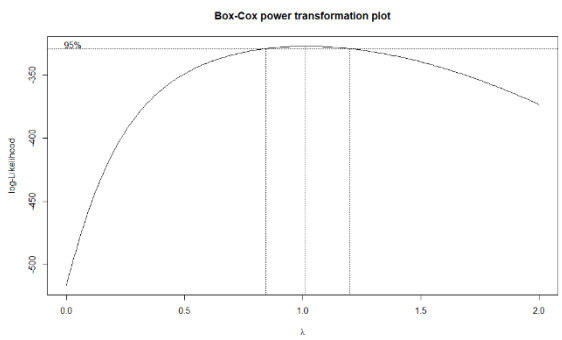
ב. חוקר התאים את הרגרסיה הבאה:

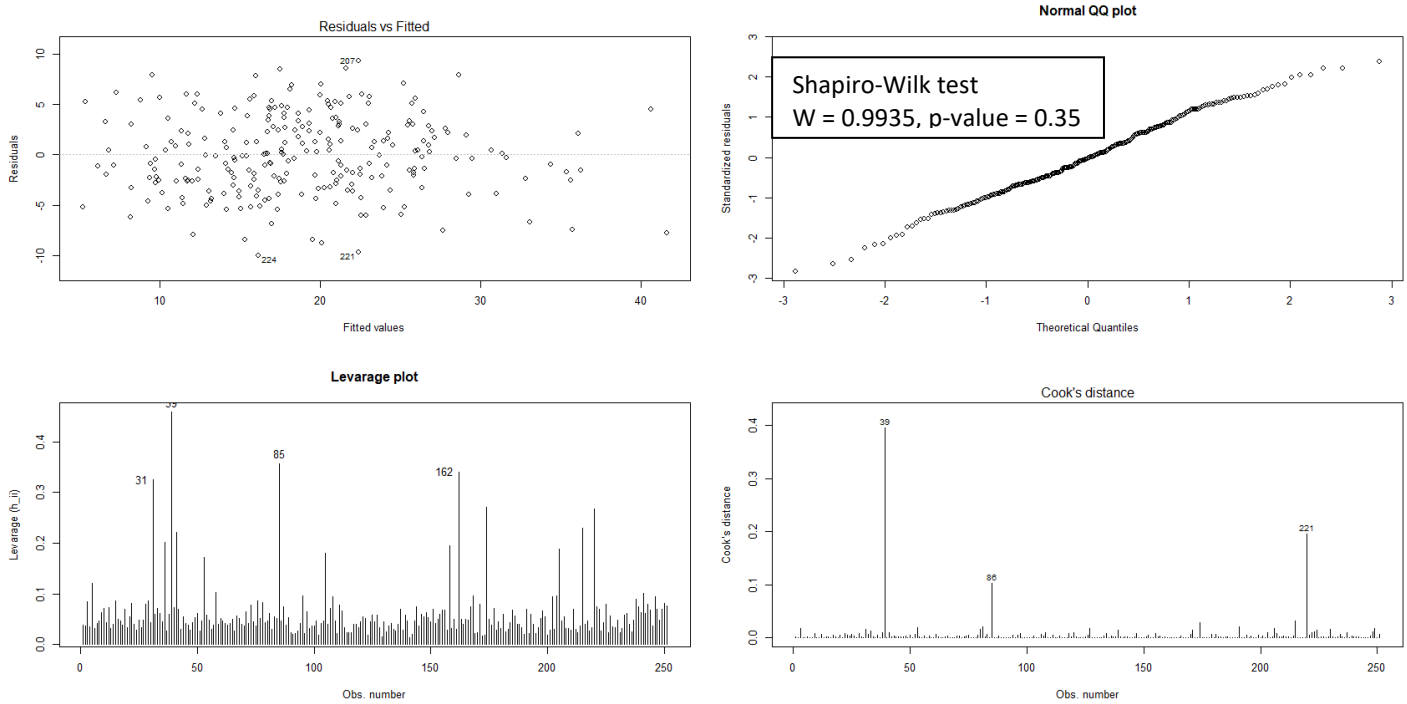
```
lm(brozek ~ age + weight + height + adipos + neck + chest + abdom
+ hip + thigh + knee + ankle + biceps + forearm + wrist)
```

וקיבל את התוצאות הבאות:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -49.73275   36.55914  -1.360  0.17502
age           0.05871    0.03007   1.952  0.05208
weight       -0.17327    0.10060  -1.722  0.08629
height        0.47077    0.50821   0.926  0.35523
adipos        0.77667    0.73440   1.058  0.29134
neck         -0.42834    0.21892  -1.957  0.05157
chest        -0.04253    0.09840  -0.432  0.66600
abdom         0.87034    0.08583  10.141  < 2e-16
hip          -0.22151    0.13816  -1.603  0.11020
thigh         0.23855    0.13594   1.755  0.08059
knee         -0.01276    0.23003  -0.055  0.95581
ankle         0.13557    0.20854   0.650  0.51625
biceps        0.15170    0.16002   0.948  0.34410
forearm       0.40486    0.18631   2.173  0.03077
wrist        -1.48070    0.49656  -2.982  0.00316

Residual standard error: 3.995 on 236 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7475,   Adjusted R-squared: 0.7325
F-statistic: 49.89 on 14 and 236 DF, p-value: < 2.2e-16
```

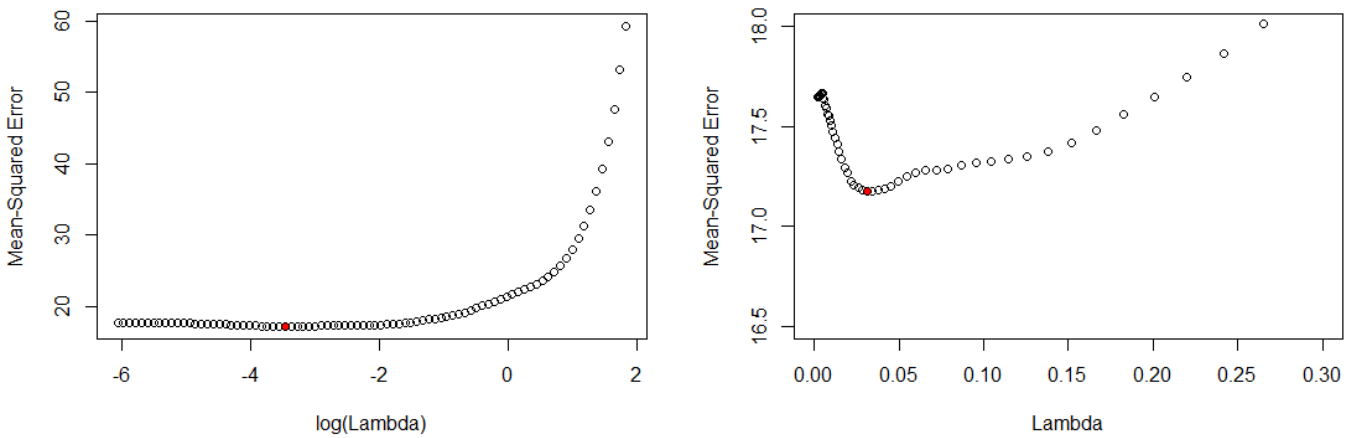




מה ניתן ללמוד הפלטים על נחיצות המסבירים? האם התוצאות מפתיעות ביחס לסעיף א' או עולות בקנה אחד עם הממצאים ב-א'? מה ניתן ללמוד על הנחות המודל? תצפיות חריגות?

ג. בעקבות הממצאים בשני הסעיפים הקודמים החוקרים החליטו להתאים מודל מעט שונה והתלבטו בין רגרסיית RIDGE ורגרסיית LASSO. מדוע הם עברו לאפיק זה? מה ההבדל בין שתי החלופות? במידה ונרצה גם לעשות גם "בחירת מודל" יחד עם התאמתו, איזו מהחלופות הייתם בוחרים (נמקו)?

ד. החוקר החליט להתאים רגרסיית LASSO וקיבל את הפלט הבא:



מה תהיה ההמלצה בעזרת פלטים אילו?

ה. החוקרים התאימו שני מודלים של רגרסיית LASSO, פעם אחת עם λ=0.026 ופעם שניה עם λ=0.1 וקבלו את התוצאות הבאות:

	OLS	LASSO λ=0.026	LASSO λ=0.1
(Intercept)	-49.7327	-12.9436	1.1784
age	0.0587	0.0548	0.0522
weight	-0.1733	-0.0655	0.0000
height	0.4708	-0.0888	-0.2621
adipos	0.7767	0.0000	0.0000
neck	-0.4283	-0.4121	-0.2657
chest	-0.0425	0.0000	0.0000
abdom	0.8703	0.8363	0.6612
hip	-0.2215	-0.1606	0.0000
thigh	0.2386	0.1813	0.0000
knee	-0.0128	0.0000	0.0000
ankle	0.1356	0.0973	0.0000
biceps	0.1517	0.1152	0.0000
forearm	0.4049	0.3931	0.2356

הסבירו את ההבדל בין התוצאות ואיך זה מתקשר לשני הסעיפים הראשונים של השאלה.

מודלים של רגרסיה לינארית - דף נוסחאות למבחן מסכם

הרגרסיה הפשוטה

המודל: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ כאשר $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ב"ת.

X_i קבועים ידועים, $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ פרמטרים לא ידועים. Y_i נצפים.

סכומי ריבועים של המשתנים: $SXX = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, SXY = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

אומדי הריבועים הפחותים: $\hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX}, \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$

שונויות האומדים: $Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SXX}, Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 Var(\hat{\beta}_1)$.

התחזיות: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_i - \bar{X})$

סכומי הריבועים במודל: $SST = SSY, SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, SSE = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$

משוואות הנורמליות:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_i = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) X_i = 0$$

אח"ה ל- σ^2: $MSE = \frac{SSE}{n-2}$

סטטיסטיים: $F = \frac{SSR}{MSE}$ $t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{MSE / SXX}}, t_{\hat{\beta}_0} = \frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{SXX}\right)}}$

רווח סמך <u>לתוחלת</u> תצפית חדשה עבורה ערך המשתנה המסביר הוא x_0:

$$\bar{Y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{X}) \pm \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{SXX}\right)} t_{(n-2,1-\alpha/2)}$$

רווח <u>חיזוי</u> לתצפית חדשה עבורה ערך המשתנה המסביר הוא x_0:

$$\bar{Y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{X}) \pm \sqrt{MSE\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{SXX}\right)} t_{(n-2,1-\alpha/2)}$$

מודל הרגרסיה המרובה

$Y_i = X_i\beta + \varepsilon_i$ כאשר X_i הוא שורה באורך p.

בכתיבה מטריציונית: $Y = X\beta + \varepsilon$ כאשר $Y \in \Re^n$ וקטור התצפיות, $\beta \in \Re^p$ וקטור המקדמים, $X \in \Re^{n\cdot p}$ מטריצת המשתנים המסבירים ו- $\varepsilon \in \Re^n$ וקטור השגיאות, המקיים אותן הנחות כמו במודל הרגרסיה הפשוטה.

האר"פ $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$. מטריצת השונויות המשותפות של האומדים: $Cov\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1}$

וקטור התחזיות: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$

סכומי ריבועים: $SST = Y^T Y - n\bar{Y}^2$, $SSR = \hat{Y}^T\hat{Y} - n\bar{Y}^2$, SSE=$\left(Y - \hat{Y}\right)^T\left(Y - \hat{Y}\right)$

הסקה על תוחלת תצפית עתידית $E(Y_0)$ (במודל עם חותך)

הסקה על הרמה הממוצעת של הפרטים המקיימים $\underline{X} = \underline{x}_0$, $\underline{C}^T = \left[1, \underline{x}_0^T\right]$:

סטטיסטי המבחן:

$$t_{st} = \frac{C^T\hat{\beta} - C^T\beta|_{H_0}}{\sqrt{\hat{V}(C^T\hat{\beta})}}$$

$$V(C^T\hat{\beta}) = C^T V(\hat{\beta}) C = \sigma^2 C^T (X^T X)^{-1} C$$

ר"ס ברמת סמך 1-α לתוחלת תצפית עתידית $E(Y_0)$: $E\left(Y_0\right) \in \underline{C}^T\hat{\underline{\beta}} \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}\left(\underline{C}^T\hat{\underline{\beta}}\right)}$

הסקה על תצפית עתידית Y_0 (במודל עם חותך).

נרצה לחזות את התגובה עבור פרט ספציפי אשר ערך המשתנה המסביר שלו הוא $\underline{x}_0$, נשתמש בשארית $e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0$ כך ש:

$$t_{st} = \frac{e_0 - 0}{\sqrt{\hat{V}(e_0)}} = \frac{(Y_0 - \hat{Y}_0) - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + \underline{C}^T(X^T X)^{-1}\underline{C})}}$$

רווח חיזוי ל- Y_0 (תצפית עתידית):

$$Y_0 \in \hat{Y}_0 \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}\left(e_0\right)} = \underline{C}^T\hat{\underline{\beta}} \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{MSE\left(1 + \underline{C}^T\left(X^T X\right)^{-1}\underline{C}\right)}$$

השוואה בין מודל מלא ומודל חלקי באמצעות מבחן "F חלקי":

מודל חלקי (RM)- בעל p מקדמים (p=k+1)

מודל מלא (FM)- בעל l+p מקדמים

l- מספר המשתנים אותם נבחן להוצאה מהמודל

$$F_{1\dots l|l+1\dots l+p-1} = \frac{[SSR(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+l}) - SSR(X_1,\dots,X_k)]/l}{SSE(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+l})/(n-p-l)}$$
$$= \frac{[SSR(FM) - SSR(RM)]/l}{MSE(FM)} \sim F_{l,n-k-1}$$

<u>מדדים לטיב מודל:</u>

1. <u>מדד R^2</u> - $R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$
2. <u>מדד R^2_{adj}</u> - $R^2_{adj} = 1 - \frac{SSE/(n-p)}{SST/(n-1)}$
3. <u>מדד AIC</u> (מודל רגרסיה) - $AIC = -2\log(L) + 2p = n\,ln(SSE/n) + 2p$
4. <u>מדד BIC</u> (מודל רגרסיה) - $BIC = -2\log(L) + ln(n)p = n\,ln(SSE/n) + ln(n)p$

<u>LOF</u>

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \hat{Y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j(\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2$$
$$SSE = SSPE + SSLF$$

$$F_{st} = \frac{MSLF}{MSPE} = \frac{SSLF/(m-2)}{SSPE/(n-m)} \geq F^{1-\alpha}_{m-2,n-m}$$

<u>רגרסיה לוגיסטית</u>

$\pi = \pi(X)$ - הסתברות להצלחה כתלות בווקטור המשתנים המסבירים X

המודל: $\log\left(\frac{\pi(X_i)}{1-\pi(X_i)}\right) = X_i\beta$

<u>בדיקת השערות לבדיקת ההשערה שחלק מה β הן 0:</u>

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_l = 0$

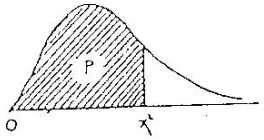
$H_1: ELSE$

<u>מבחן LRT</u>

הסטטיסטי הוא $\chi^2_{st} = Dev(RM) - Dev(FM) \sim \chi^2_l$ כאשר $Dev = -2\log(L(\hat{\beta}))$

<u>מבחן Wald</u>: סטטיסטי מבוסס על תבניות ריבועיות של האומדים שברוח משפט קוקרן מפולגות חי בריבוע

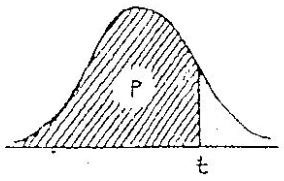
התפלגות חי-בריבוע (נגוף הטבלה רבי χ^2)



ד.ח. \ P	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	$.0^{4}393$	$.0^{3}157$	$.0^{3}982$	$.0^{3}393$	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

ח 2

לגות t של סטודנט (בגוף הטבלה - ערכי t)



ד.ח. \ P	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom (df_2) \ Numerator Degrees of Freedom (df_1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	9.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	6.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom (df_2) \ Numerator Degrees of Freedom (df_1)	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
∞	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000